(#389). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (III): METODO DE NEWTON

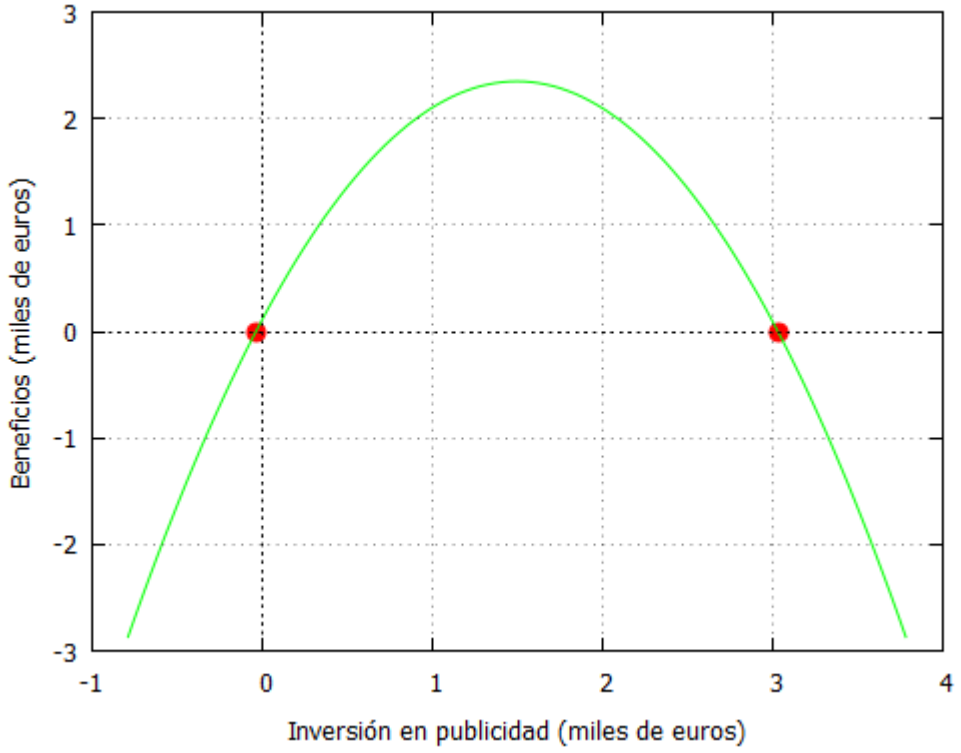
[MONOTEMA] Seguimos en la búsqueda de los ceros de una función con aproximaciones numéricas. Tras ver el método de la bisección y el método del punto fijo, vamos a continuar con el método de Newton, también conocido como Newton-Raphson. Lo haremos, como siempre, desde el punto de vista práctico, y siguiendo a Burden, Faires & Burden (2017).

Función de partida

Emplearemos la misma función que en los ejemplos anteriores, donde se relaciona la inversión en publicidad con los beneficios.

$$f(x) = -x^2 + 3x + 0.1$$

```
f_ceronegativo:ev(funcion,x=-0.03297097167558977), numer;
  f_ceropositivo:ev(funcion,x=3.03297097167559), numer;
plot2d([[discrete, [[-0.0329709716755897,f_ceronegativo],
          [3.03297097167559, f_ceropositivo]]],
               funcion],[x,-1,4],[y,-3,3],
  [xlabel, "Inversión en publicidad (miles de euros)"],
        [ylabel, "Beneficios (miles de euros)"],
  [style, points, lines], [color, red, green], [legend,
                        false]);
```



Método de Newton

(1) Objetivo: Aproximarse numéricamente a la solución *p* de una función $f(x)$, tal que $f(p) = 0$

(2) Condiciones: La función $f(x)$ debe ser continua y dos veces diferenciable en el intervalo $[a, b]$ considerado.

(3) Descripción rápida: Partimos del primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandido alrededor de p_0 y evaluado en $x = p$. Suponemos que p_0 es una buena aproximación a p , es decir, que la semilla inicial está relativamente cerca de la solución. Cuando $f(p) = 0$, entonces, obviando el término de error de la serie de Taylor:

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

A partir de esa fórmula podemos construir la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

(4) Convergencia: Un criterio suficiente (pero no necesario) para que lo haga es que:

$$\frac{f(p_0)f''(p_0)}{(f'(p_0))^2} < 1$$

Si se cumple la fórmula anterior cuando está en un intervalo alrededor de la raíz entonces la solución converge en cualquier punto de ese intervalo. La convergencia es no lineal (cuadrática), y esta es una de las razones por las que es uno de los procedimientos más empleados.

(5) Estimación del error: Hay diversas opciones, aunque una de las más recomendables es el error relativo:

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \epsilon, p_N \neq 0$$

Implementación en Maxima

Vamos a implementar el algoritmo partiendo de 3 semillas diferentes, para ver que en función de la elección de ellas nos puede llevar a una de las dos soluciones posibles. Para ello, empleamos un bucle con 10 iteraciones, tomando como semillas: 3, 0.1 y 8. Esto hace que evaluemos 3 funciones diferentes (f1, f2, f3) a la hora de analizar su convergencia.

```
f1(i):= -x1[i]^2+3*x1[i]+0.1;
derivada_f1(i):=-(2*x1[i])+3;
x1[0]:3;
for i:1 thru 10 do(
x1[i]:x1[i-1]-(f1(i-1)/derivada_f1(i-1)));
f2(i):= -x2[i]^2+3*x2[i]+0.1;
derivada_f2(i):=-(2*x2[i])+3;
x2[0]:0.2;
for i:1 thru 10 do(
x2[i]:x2[i-1]-(f2(i-1)/derivada_f2(i-1)));
f3(i):= -x3[i]^2+3*x3[i]+0.1;
derivada_f3(i):=-(2*x3[i])+3;
x3[0]:8;
for i:1 thru 10 do(
x3[i]:x3[i-1]-(f3(i-1)/derivada_f3(i-1)));
datos: makelist([i,”Iteración”,x1[i],f1(i-1), x2[i],f2(i-1),
x3[i], f3(i-1)], i, 1,10);
matriz_resultados:apply(matrix,datos);
```

Le hemos dicho al programa que nos retorne en el output siguiente:

1	*Iteración*	3	0.1	0.2	0.66	8	−39.9
2	*Iteración*	3.033333333333333	−0.001111111111110924	−0.05384615384615382	−0.06443786982248512	4.930769230769231	−9.4201775147929
3	*Iteración*	3.032971014492754	$-1.312749425552706\ 10^{-7}$	−0.03311119573495812	$-4.299384878730522\ 10^{-4}$	3.557873404622284	−1.884842949451709
4	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097808829651	$-1.966098844841113\ 10^{-8}$	3.099914488097566	−0.2097263692244958
5	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558918	$-4.163336342344337\ 10^{-17}$	3.034371494773629	−0.00429588397385991
6	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558916	$1.387778780781446\ 10^{-17}$	3.032971610850964	$-1.959674999690852\ 10^{-6}$
7	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675722	$-4.082012505790544\ 10^{-13}$
8	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
9	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
10	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
11	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
12	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
13	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
14	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$
15	*Iteración*	3.03297097167559	$3.608224830031759\ 10^{-16}$	−0.03297097167558917	0.0	3.032970971675589	$3.608224830031759\ 10^{-16}$

El método converge bastante rápido, incluso cuando la semilla se aleja de la raíz, y como puede observarse en función de la elección de la semilla converge hacia una de las dos

soluciones.

Criterio de parada

Al igual que hicimos en el método de la bisección, podemos estipular que nos baste con una tolerancia de error, es decir, pedirle al programa que pare las iteraciones cuando se cumpla una condición determinada, por ejemplo, que el error relativo sea menor que una cota que fijemos. De este modo, si fijamos que el error relativo sea como máximo 0.0001:

```
      f1(i):= -p[i]^2+3*p[i]+0.1;
     derivada_f1(i):=-(2*p[i])+3;
                p[0]:8;
 for i:1 while Error_rel[i]>0.0001 do(
p[i]:p[i-1]-(f1(i-1)/derivada_f1(i-1)),
    Error_abs[i]:abs(p[i]-p[i-1]),
 Error_rel[i]: Error_abs[i]/abs(p[i]),
       print(i,p[i],Error_rel[i]));
```

Le hemos dicho al programa que fije un error relativo mayor que 0.0001, por lo que parará en esa iteración, y de esta manera sabremos que en la siguiente iteración el error relativo estará por debajo de esa cota. Si ejecutamos esas instrucciones en Maxima vemos que para en la iteración número 5, por lo que incluso con semillas alejadas de la raíz la convergencia puede ser muy rápida.

Conclusión

En este post hemos explicado brevemente en qué consiste el método de Newton, un algoritmo muy empleado en diversas aplicaciones estadísticas, como para obtener los estimadores que minimizan una función de error (hacen que su derivada sea cero, por lo que es realmente obtener la aproximación numérica a la raíz de una función). El método de Newton tiene, además, diversas variantes que comentaremos en futuras entradas.

Todos los posts relacionados

(#428) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIc)

(#427) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIb)

(#426) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIa)

(#424) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (I)

(#422). JUGADORES ACB AL NIVEL DE NBA EN LA TEMPORADA 2018/19

(#421). LOS JUGADORES MÁS PRODUCTIVOS DE LA ACB 2018/19

(#420). LA PARADOJA DE CHEVALIER DE MERE Y LOS ESTUDIANTES DE MARKETING

(#412). LOS JUGADORES MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19

(#411). LOS ROOKIES MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19

(#410) ¿QUIÉN HA SIDO EL MEJOR ANOTADOR DE LA FASE REGULAR DE LA EUROLIGA 2018/19?

(#409). ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ESTIMACIÓN DEL RENDIMIENTO POR MINUTO EN BALONCESTO (II)

(#408). ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ESTIMACIÓN DEL RENDIMIENTO POR MINUTO EN BALONCESTO (I)

(#407). AVANCE DE LOS NOVATOS MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19

(#398). AJUSTE DE FUNCIONES (II): CAPACIDAD EXPLICATIVA Y PARTICIÓN DE LA FUNCIÓN

(#397). AJUSTE DE FUNCIONES (I): SPLINES VS MÍNIMOS CUADRADOS

(#396). INTERPOLACIÓN (IV): MÉTODO DE SPLINE CÚBICO

(#395). INTERPOLACIÓN (III): MÉTODO DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

(#394). INTERPOLACIÓN (II): MÉTODO DE NEVILLE

(#393). INTERPOLACIÓN (I): POLINOMIO DE LAGRANGE

(#391). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (V): MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA

(#390). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (IV): MÉTODO DE LA SECANTE

(#389). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (III): METODO DE NEWTON

(#388). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (II): METODO DEL PUNTO FIJO

(#387). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (I): MÉTODO DE LA BISECCIÓN

(#384). MEJOR UN SÓLO ITEM QUE VARIOS PARA MEDIR ACTITUDES

(#381). TABLAS DE TUMORES TOTALES EN EL ESTUDIO DEL NTP SOBRE EFECTOS DE LA RADIACIÓN DE TELÉFONO MÓVIL

(#380). ÍNDICES APROXIMADOS FLEXIBLES EN ECUACIONES ESTRUCTURALES

(377). AVANZANDO EN LA COMPLEJIDAD: DOBLE DEPENDENCIA

(#376). CAMPOS DIRECCIONALES, COMENZANDO A REPRESENTAR LA COMPLEJIDAD

(#373). PREDICCIONES CON BUENAS APROXIMACIONES

(#366). MODELO DE HOMOGENEIDAD EN TABLAS DE 2X2

(#365). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (V): MATRIZ DE DATOS BRUTOS

(#362). ¿HORMESIS ENTRE EL VOLUMEN DE ENTRENAMIENTO Y LA HIPERTROFIA?

(#358). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (IV): REGRESIÓN LINEAL SIMPLE CON FIABILIDADES DIVERSAS

(#354). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (III): COVARIANZA Y CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES LATENTES

(#353). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (II): VARIABLES LATENTES Y FIABILIDAD

(#352). TESTOSTERONA Y CONSUMO CONSPICUO EN HOMBRES

(#350). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (I): COVARIANZAS Y DESVIACIONES SOBRE LA MEDIA

(#346). MODELO NO LINEAL EN LAS VARIABLES PERO LINEAL EN LOS PARÁMETROS CON STATA Y MAXIMA

(#337). EXPLORANDO LA PREDICCIÓN LINEAL EN MARKETING CON MAXIMA

(#336) EXPLORANDO EL DETERMINISMO Y EL AZAR CON C Y MAXIMA

(#335). EXPLORANDO EL COMPORTAMIENTO CAÓTICO CON MAXIMA

(#334). EXPLORANDO LA NO LINEALIDAD CON MAXIMA

(#331). LOS CONSTRUCTOS FORMATIVOS NO REFLEJAN ESTADOS PSICOLÓGICOS

(#323). EL ATAQUE CON MICROONDAS A LA EMBAJADA DE EEUU EN MOSCÚ DURANTE LA GUERRA FRÍA

(#314). REDUCIR EL SESGO EN ESTUDIOS SOBRE EFECTIVIDAD DE VACUNAS

(#313). EL SISTEMA PLANETARIO DE TRAPPIST-1

(#310). MÁS ALLÁ DEL REDUCCIONISMO EN BIOLOGÍA

(#307). LA CRISIS DE LA INVESTIGACIÓN EN PSICOLOGÍA

(#302). CONSTRUCTOS EN PSICOLOGÍA E IMPLICACIONES ESTADÍSTICAS

(#301). CENSURA EN EL LENGUAJE CIENTÍFICO

(#298). ¿CAMBIAR DE ENTRENADOR A MITAD DE TEMPORADA?

(#294). NEUROLOGÍA DE LA MALDAD: PISTAS SOBRE LAS RAÍCES DE LA MALDAD INDIVIDUAL

(#287). MEDIAS VERDADES Y OCULTACIÓN: ACEPTACIÓN DEL ENGAÑO DE CORPORACIONES

(#283). INTERPRETACIÓN FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD: EL PAPEL DE LOS MODELOS

(#276). LA IRRACIONALIDAD, SCHRÖDINGER, Y EL EFECTO TÚNEL

(#265). DEFENDIENDO EL P-VALOR A TRAVÉS DE SU CORRECTA INTERPRETACIÓN

(#264). MÁS ALLÁ DE LOS ENSAYOS CONTROLADOS ALEATORIZADOS

(#263). CAUSALIDAD EN CASOS INDIVIDUALES: ALGUNAS RECOMENDACIONES PARA SU ESTUDIO

(#260). PROPONEN SER 10 VECES MÁS EXIGENTES CON EL P-VALOR

(#257). ERRORES DE CODIFICACIÓN DE EMBOLIAS PULMONARES AL USAR EL ICD-10

(#252). LA PREGABALINA NO SE ASOCIA A MALFORMACIONES EN EL EMBARAZO

(#243). LOS DEPORTISTAS DE ÉLITE VIVEN MÁS, PERO CON MATICES

(#232). LA OTRA HISTORIA DE NIKE

(#191). LA TRIADA OSCURA, LOS ANTICONCEPTIVOS Y LA PREFERENCIA SEXUAL

(#185). VENTA DE ENTRADAS EN LA NBA Y POTENCIAL DE LOS EQUIPOS

(#163). CRECEN LAS DUDAS SOBRE PLS (PARTIAL LEAST SQUARES)

(#159). ENTENDER LA NATURALEZA DE LOS DATOS Y DE LOS TEST ESTADÍSTICOS

(#128). INDICADORES FORMATIVOS EN ECUACIONES ESTRUCTURALES

(#127). AJUSTE EXACTO EN ECUACIONES ESTRUCTURALES

(#104). CORRUPCIÓN Y DESIGUALDAD ENTRE LOS MUY RICOS

(#100). DESCREÍDOS DE LA EPIDEMIOLOGÍA

(#90). REDES EN PSICOPATOLOGÍA Y EN MARKETING

(#76). EL 85-90% DE LOS NUEVOS MEDICAMENTOS SON INNECESARIOS

(#33). CLUSTERS DE CÁNCER PEDIÁTRICO

(#31). TRÁFICO Y CÁNCER DE PULMÓN

(#26). FOTOVOLTAICAS HIPERGEOMÉTRICAS

(#24). ROMPER EL CRISTAL

(#22). COMPLEJIDAD DE LOS FENÓMENOS SOCIALES

(#20). DECISIONES HEURÍSTICAS

(#17). RADICALES DE LAS VACUNAS

(#13). 24755 CACAS EN EL PARQUE

(#12). ESTADÍSTICAS SIN ESTADÍSTICA

(#10). EL DESCUBRIMIENTO DEL ARGÓN

(#6). ¿VIVIMOS MÁS Y CON MEJOR SALUD?

(#5). ¿ES LA ECONOMÍA UNA CIENCIA?

(#3). HEZONJA Y LAS PREDICCIONES ESTADÍSTICAS

(#1) ¿CÓMO JUGARÁ MARIO HEZONJA SU PRÓXIMO PARTIDO?