(#395). INTERPOLACIÓN (III): MÉTODO DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

[MONOTEMA] El polinomio de Lagrange se puede obtener también por medio de un método sencillo que emplea diferencias divididas de las imágenes con respecto a x. Este método también se conoce como "diferencias divididas de Newton". Seguiremos a Burden, Faires & Burden (2017), y lo enfocaremos, como siempre, de manera simplificada.

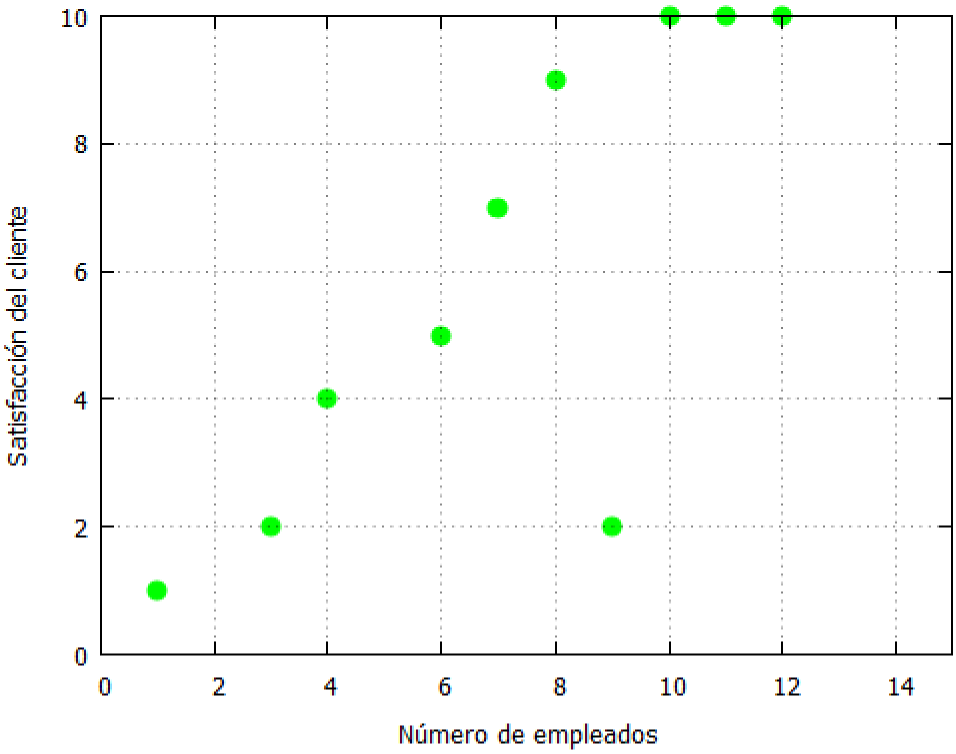
Datos de partida

Usaremos los mismos datos que en el método de Lagrange:

x	f(x)
1	1
3	2
4	4
6	5
7	7
8	9
9	2
10	10
11	10
12	10

Estos datos relacionan la cantidad de empleados utilizados en un gran supermercado (*x*) con la saltisfacción del cliente $y = f(x)$. La satisfacción del cliente se mide en una escala de 0 a 10, donde 0 es el valor mínimo y 10 el valor máximo.

```
x_:[1,3,4,6,7,8,9,10,11,12];
fx_:[1,2,4,5,7,9,2,10,10,10];
plot2d([discrete, x_, fx_],
[x,0,15],[y,0,10], [style, points], [color,green],
[xlabel, “Número de empleados”],
[ylabel, “Satisfacción del cliente”], [legend, false]);
```



Método de diferencias divididas

(1) Objetivo: Aproximarse numéricamente a la función $f(x)$, de la que conocemos sólo ciertos datos por medio de un polinomio que “pase” por los *i* puntos conocidos.

(2) Condiciones: La función $f(x)$ debe ser continua en el intervalo $[a,b]$ considerado.

(3) Descripción rápida: Partimos de la serie de datos $(x_i, f(x_i))$ y definimos la primera diferencia dividida como

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Si implementamos ese cálculo de manera recursiva llegamos a la fórmula general:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Así, construimos una tabla de *n*-1 diferencias divididas a partir de las cuales podemos hallar el polinimio de Lagrange:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$$

(4) Estimación del error: Podemos emplear el mismo sistema que para el método de Lagrange

Implementación en Maxima

Vamos a realizar nuestra estimación en Maxima. Supongamos, como en el caso del método de Lagrange, que queremos aproximarnos a un valor que desconocemos, cuando el número de empleados es 2. Para ello vamos a coger los 4 primeros puntos, con la programación siguiente:

```
x_:[1,3,4,6];
fx:[1,2,4,5];
valores: transpose(matrix(x_));
imagenes: transpose(matrix(fx));
[n,m]:matrix_size (valores);
funcion__1: zeromatrix(n,m);
for k:1 thru n-1 do
(funcion__1[k,1]: (imagenes[k+1,1]-imagenes[k,1])/(valores[k+1,1]-valores[k,1]))$
print(funcion__1);
funcion__2: zeromatrix(n,m);
for k:1 thru n-2 do
(funcion__2[k,1]: (funcion__1[k+1,1]-funcion__1[k,1])/((valores[k+2,1]-valores[k,1])))$
print(funcion__2);
funcion__3: zeromatrix(n,m);
for k:1 thru n-3 do
(funcion__3[k,1]: (funcion__2[k+1,1]-funcion__2[k,1])/((valores[k+3,1]-valores[k,1])))$
print(funcion__3);
matriztotal: addcol(valores,imagenes,funcion__1,funcion__2, funcion__3);
p3:matriztotal[1,2]+((x-matriztotal[1,1])*matriztotal[1,3])+((x-matriztotal[1,1])*(x-matriztotal[2,1])*matriztotal[1,4])
+((x-matriztotal[1,1])*(x-matriztotal[2,1])*(x-matriztotal[3,1])*matriztotal[1,5]);
```

La tabla resultante (en forma de matriz) es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ 3 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde en la primera columna tenemos los valores de x_i en la segunda los valores de $f(x_i)$ y en las 3 restantes los valores computados por el procedimiento de Newton.

Por tanto, podemos construir el polinomio de Lagrange a partir de estos resultados, que nos lo da la parte de código ya implementado:

```
p3:matriztotal[1,2]+((x-matriztotal[1,1])*matriztotal[1,3])+((x-matriztotal[1,1])*(x-matriztotal[2,1])*matriztotal[1,4])
+((x-matriztotal[1,1])*(x-matriztotal[2,1])*(x-matriztotal[3,1])*matriztotal[1,5]);
```

El polinomio resultante es:

$$P_3(x) = -\frac{2x^3 - 21x^2 + 53x - 44}{10}$$

Que como vemos es un polinomio de orden 3, ya que hemos cogido 4 puntos para la interpolación. Si ahora evaluamos el polinomio en el punto de interés x=2:

```
solucion:ev(p3,x=2);
```

Obtenemos el resultado de:

$$f(x=2) = 0.6$$

que es exactamente lo mismo que lográbamos con la implementación directa de la fórmula del polinomio de Lagrange.

Diferencias hacia atrás

La obtención del polinomio de Lagrange puede lograrse cambiando la forma de recorrer la matriz de diferencias devididas. En lugar de hacerlo desde x_1 lo hacemos desde x_n. Gráficamente quizá se entiende mejor: en verde el método hacia adelante y en rojo el método hacia atrás.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ 3 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ 3 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados son idénticos, y lo podemos comprobar con el siguiente código:

```
p3_atras:matriztotal[4,2]+((x-matriztotal[4,1])*matriztotal[3,3])+((x-matriztotal[4,1])*(x-matriztotal[3,1])*matriztotal[2,4])
                +((x-matriztotal[4,1])*(x-matriztotal[3,1])*(x-matriztotal[2,1])*matriztotal[1,5]), ratsimp;
```

Evidentemente, tenemos que tener cuidado de comenzar a contar las “x” desde el final en lugar que desde el principio.

Nodos con igual espaciado

Cuando los puntos (nodos) x_i se pueden ordenar con igual espaciado, podemos también obtener el polinomio de Lagrange a través de la siguiente fórmula:

$$P_n(x_s) = f(x_i)+s\Delta f(x_i)+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_i)+...+\frac{s(s-1)...(s-n-1)}{n!}\Delta^n f(x_i)$$

donde n es el orden del polinomio, y $\Delta^n f(x_i)$ son las diferencias divididas entre las imágenes consecutivas. Además, $s=\frac{x_s-x_p}{h}$ donde x_s es el dato para el que se quiere estimar su imagen y x_p es el dato de partida elegido para la interpolación. Finalmente h es la holgura del espaciado entre los datos.

En Maxima, podemos implementar el procedimiento anterior intentando inferir el valor de x=5 cuando se cogen los nodos equiespaciados [4,6,8,10]. El valor de la fórmula anterior quedaría así

$$P_n(x_s=4) = f(x_i=4)+s\Delta f(x_i=4)+\frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_i=4)+\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_i=4)$$

```
x_:[4,6,8,10];
fx:[4,5,9,10];
valores: transpose(matrix(x_));
imagenes: transpose(matrix(fx));
[n,m]:matrix_size (valores);
funcion__1: zeromatrix(n,m);
for k:1 thru n-1 do
(funcion__1[k,1]: imagenes[k+1,1]-imagenes[k,1])$
print(funcion__1);
funcion__2: zeromatrix(n,m);
for k:1 thru n-2 do
(funcion__2[k,1]: funcion__1[k+1,1]-funcion__1[k,1])$
print(funcion__2);
funcion__3: zeromatrix(n,m);
for k:1 thru n-3 do
(funcion__3[k,1]: funcion__2[k+1,1]-funcion__2[k,1])$
print(funcion__3);
matriztotal: addcol(valores,imagenes,funcion__1,funcion__2, funcion__3);
xs: 5;
xp:4;
h:2;
s:(xs-xp)/h;
p3_equiespaciado:matriztotal[1,2]+(s*matriztotal[1,3])+((s*(s-1)/2)*matriztotal[1,4])
+(s*(s-1)*(s-2)/6)*matriztotal[1,5];
```

Que nos da un valor:

$f(x_s = 5) = 3.75$

Conclusión

El método de diferencias divididas proporciona una forma simplificada de obtener el polinomio de Lagrange. Sin embargo, está sujeto a las mismas limitaciones, es decir, hemos de ser muy cuidadosos a la hora de eleguir los nodos de interpolación.

Todos los posts relacionados

(#428) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIc)
(#427) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIb)
(#426) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIa)
(#424) TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (I)
(#422). JUGADORES ACB AL NIVEL DE NBA EN LA TEMPORADA 2018/19
(#421). LOS JUGADORES MÁS PRODUCTIVOS DE LA ACB 2018/19
(#420). LA PARADOJA DE CHEVALIER DE MERE Y LOS ESTUDIANTES DE MARKETING
(#412). LOS JUGADORES MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19
(#411). LOS ROOKIES MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19
(#410) ¿QUIÉN HA SIDO EL MEJOR ANOTADOR DE LA FASE REGULAR DE LA EUROLIGA 2018/19?
(#409). ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ESTIMACIÓN DEL RENDIMIENTO POR MINUTO EN BALONCESTO (II)
(#408). ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ESTIMACIÓN DEL RENDIMIENTO POR MINUTO EN BALONCESTO (I)
(#407). AVANCE DE LOS NOVATOS MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19
(#398). AJUSTE DE FUNCIONES (II): CAPACIDAD EXPLICATIVA Y PARTICIÓN DE LA FUNCIÓN
(#397). AJUSTE DE FUNCIONES (I): SPLINES VS MÍNIMOS CUADRADOS
(#396). INTERPOLACIÓN (IV): MÉTODO DE SPLINE CÚBICO
(#395). INTERPOLACIÓN (III): MÉTODO DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS
(#394). INTERPOLACIÓN (II): MÉTODO DE NEVILLE
(#393). INTERPOLACIÓN (I): POLINOMIO DE LAGRANGE
(#391). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (V): MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA
(#390). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (IV): MÉTODO DE LA SECANTE
(#389). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (III): METODO DE NEWTON
(#388). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (II): METODO DEL PUNTO FIJO
(#387). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (I): MÉTODO DE LA BISECCIÓN
(#384). MEJOR UN SÓLO ITEM QUE VARIOS PARA MEDIR ACTITUDES
(#381). TABLAS DE TUMORES TOTALES EN EL ESTUDIO DEL NTP SOBRE EFECTOS DE LA RADIACIÓN DE TELÉFONO MÓVIL
(#380). ÍNDICES APROXIMADOS FLEXIBLES EN ECUACIONES ESTRUCTURALES
(377). AVANZANDO EN LA COMPLEJIDAD: DOBLE DEPENDENCIA
(#376). CAMPOS DIRECCIONALES, COMENZANDO A REPRESENTAR LA COMPLEJIDAD
(#373). PREDICCIONES CON BUENAS APROXIMACIONES
(#366). MODELO DE HOMOGENEIDAD EN TABLAS DE 2X2
(#365). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (V): MATRIZ DE DATOS BRUTOS
(#362). ¿HORMESIS ENTRE EL VOLUMEN DE ENTRENAMIENTO Y LA HIPERTROFIA?
(#358). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (IV): REGRESIÓN LINEAL SIMPLE CON FIABILIDADES DIVERSAS
(#354). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (III): COVARIANZA Y CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES LATENTES
(#353). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (II): VARIABLES LATENTES Y FIABILIDAD
(#352). TESTOSTERONA Y CONSUMO CONSPICUO EN HOMBRES
(#350). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (I): COVARIANZAS Y DESVIACIONES SOBRE LA MEDIA
(#346). MODELO NO LINEAL EN LAS VARIABLES PERO LINEAL EN LOS PARÁMETROS CON STATA Y MAXIMA
(#337). EXPLORANDO LA PREDICCIÓN LINEAL EN MARKETING CON MAXIMA
(#336) EXPLORANDO EL DETERMINISMO Y EL AZAR CON C Y MAXIMA
(#335). EXPLORANDO EL COMPORTAMIENTO CAÓTICO CON MAXIMA
(#334). EXPLORANDO LA NO LINEALIDAD CON MAXIMA
(#331). LOS CONSTRUCTOS FORMATIVOS NO REFLEJAN ESTADOS PSICOLÓGICOS
(#323). EL ATAQUE CON MICROONDAS A LA EMBAJADA DE EEUU EN MOSCÚ DURANTE LA GUERRA FRÍA
(#314). REDUCIR EL SESGO EN ESTUDIOS SOBRE EFECTIVIDAD DE VACUNAS
(#313). EL SISTEMA PLANETARIO DE TRAPPIST-1
(#310). MÁS ALLÁ DEL REDUCCIONISMO EN BIOLOGÍA
(#307). LA CRISIS DE LA INVESTIGACIÓN EN PSICOLOGÍA
(#302). CONSTRUCTOS EN PSICOLOGÍA E IMPLICACIONES ESTADÍSTICAS
(#301). CENSURA EN EL LENGUAJE CIENTÍFICO
(#298). ¿CAMBIAR DE ENTRENADOR A MITAD DE TEMPORADA?
(#294). NEUROLOGÍA DE LA MALDAD: PISTAS SOBRE LAS RAÍCES DE LA MALDAD INDIVIDUAL
(#287). MEDIAS VERDADES Y OCULTACIÓN: ACEPTACIÓN DEL ENGAÑO DE CORPORACIONES
(#283). INTERPRETACIÓN FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD: EL PAPEL DE LOS MODELOS
(#276). LA IRRACIONALIDAD, SCHRÖDINGER, Y EL EFECTO TÚNEL
(#265). DEFENDIENDO EL P-VALOR A TRAVÉS DE SU CORRECTA INTERPRETACIÓN
(#264). MÁS ALLÁ DE LOS ENSAYOS CONTROLADOS ALEATORIZADOS
(#263). CAUSALIDAD EN CASOS INDIVIDUALES: ALGUNAS RECOMENDACIONES PARA SU ESTUDIO
(#260). PROPONEN SER 10 VECES MÁS EXIGENTES CON EL P-VALOR
(#257). ERRORES DE CODIFICACIÓN DE EMBOLIAS PULMONARES AL USAR EL ICD-10
(#252). LA PREGABALINA NO SE ASOCIA A MALFORMACIONES EN EL EMBARAZO
(#243). LOS DEPORTISTAS DE ÉLITE VIVEN MÁS, PERO CON MATICES
(#232). LA OTRA HISTORIA DE NIKE
(#191). LA TRIADA OSCURA, LOS ANTICONCEPTIVOS Y LA PREFERENCIA SEXUAL
(#185). VENTA DE ENTRADAS EN LA NBA Y POTENCIAL DE LOS EQUIPOS
(#163). CRECEN LAS DUDAS SOBRE PLS (PARTIAL LEAST SQUARES)
(#159). ENTENDER LA NATURALEZA DE LOS DATOS Y DE LOS TEST ESTADÍSTICOS
(#128). INDICADORES FORMATIVOS EN ECUACIONES ESTRUCTURALES
(#127). AJUSTE EXACTO EN ECUACIONES ESTRUCTURALES
(#104). CORRUPCIÓN Y DESIGUALDAD ENTRE LOS MUY RICOS
(#100). DESCREÍDOS DE LA EPIDEMIOLOGÍA
(#90). REDES EN PSICOPATOLOGÍA Y EN MARKETING
(#76). EL 85-90% DE LOS NUEVOS MEDICAMENTOS SON INNECESARIOS
(#33). CLUSTERS DE CÁNCER PEDIÁTRICO
(#31). TRÁFICO Y CÁNCER DE PULMÓN
(#26). FOTOVOLTAICAS HIPERGEOMÉTRICAS
(#24). ROMPER EL CRISTAL
(#22). COMPLEJIDAD DE LOS FENÓMENOS SOCIALES
(#20). DECISIONES HEURÍSTICAS
(#17). RADICALES DE LAS VACUNAS
(#13). 24755 CACAS EN EL PARQUE
(#12). ESTADÍSTICAS SIN ESTADÍSTICA
(#10). EL DESCUBRIMIENTO DEL ARGÓN
(#6). ¿VIVIMOS MÁS Y CON MEJOR SALUD?
(#5). ¿ES LA ECONOMÍA UNA CIENCIA?
(#3). HEZONJA Y LAS PREDICCIONES ESTADÍSTICAS
(#1) ¿CÓMO JUGARÁ MARIO HEZONJA SU PRÓXIMO PARTIDO?