

(#438). TEORÍA DE PROBABILIDAD E INFERENCIA ESTADÍSTICA SEGÚN ARIS SPANOS (IIIe)

[MONOTEMA] Avanzamos con el quinto apartado del tercer capítulo de Probability Theory and Statistical Inference, de Aris Spanos.

Parámetros y momentos

Además del histograma de la distribución de datos observados, también disponemos de ciertos números que caracterizan la distribución como la media o la varianza. Esos valores numéricos están relacionados con los momentos de la distribución, que son esperanzas matemáticas de ciertas funciones de la variable aleatoria X , genéricamente denotadas por $h(X)$.

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_x(x; \theta) dx = g(\theta)$$

Si escogemos diferentes funciones $g(\theta)$ obtendremos diferentes momentos de la distribución. Por ejemplo:

Media μ

$$h(X) = X, x \in \mathbb{R}_X$$

Para variables continuas:

$$\mu = E[h(X)] = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x; \theta) dx$$

Para variables discretas:

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} x_i f_x(x_i; \theta)$$

Varianza σ^2

$$h(X) = [X - E(X)]^2, x \in \mathbb{R}_X$$

$$\sigma^2 = h(X) = [X - E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu]^2 f_x(x; \theta) dx$$

Una forma conveniente de calcular los momentos de una distribución es a través de la función generatriz de momentos (mgf), donde $h(X) = e^{tX}$

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(x) dx, t \in (-h, h), h > 0$$

Para variables aleatorias discretas las integrales se vuelven sumatorios.

Por ejemplo, para una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{tX} f(x) dx$$

Dado que: $f_x = \frac{e^{-\theta} \theta^r}{r!}$

Entonces:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{r=0}^{\infty} e^{tX} \left[\frac{e^{-\theta} \theta^r}{r!} dx \right] = e^{-\theta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(e^t e^{\theta})^r}{r!} = e^{\theta(e^t - 1)}$$

A partir de los momentos de la distribución se puede estudiar la asimetría y el apuntamiento. De este modo, podemos caracterizar la forma de la distribución a partir de los momentos.

