(#387). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (I): MÉTODO DE LA BISECCIÓN

[MONOTEMA] Vamos a comenzar una serie de posts sobre la búsqueda de soluciones numéricas (también llamadas raíces o ceros) para una función. El objetivo es que los alumnos de marketing se familiaricen con técnicas matemáticas y de computación que les ayuden a resolver problemas más complejos en el futuro. Para ello vamos a emplear el software Maxima, de libre acceso.

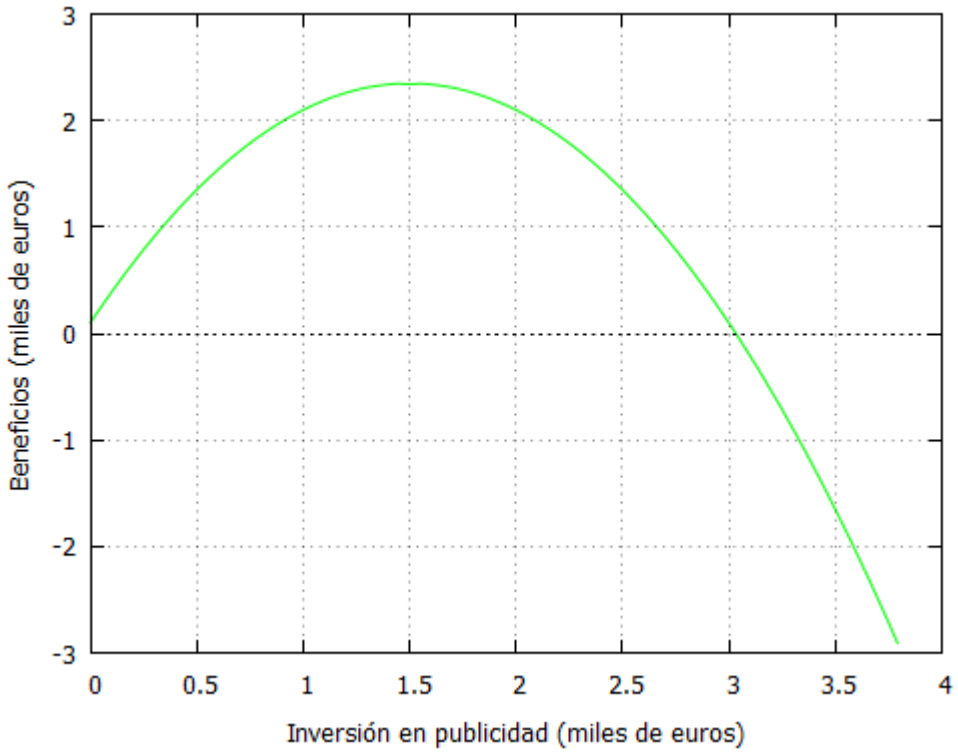
Función de partida

Imaginemos que conocemos la forma de una función que relaciona la inversión en publicidad con los beneficios. En entradas anteriores hemos explicado que esa relación es probablemente no lineal, y que puede adoptar diversas formas. Vamos a partir de la siguiente función:

$$f(x) = -x^2 + 3x + 0.1$$

Lo primero que vamos a hacer es representar esa función en Maxima:

```
funcion: -x^2+3*x+0.1;
plot2d(funcion,[x,0,4],[y,-3,3],
[xlabel, "Inversión en publicidad (miles de euros)"],
[ylabel, "Beneficios (miles de euros)"]);
```

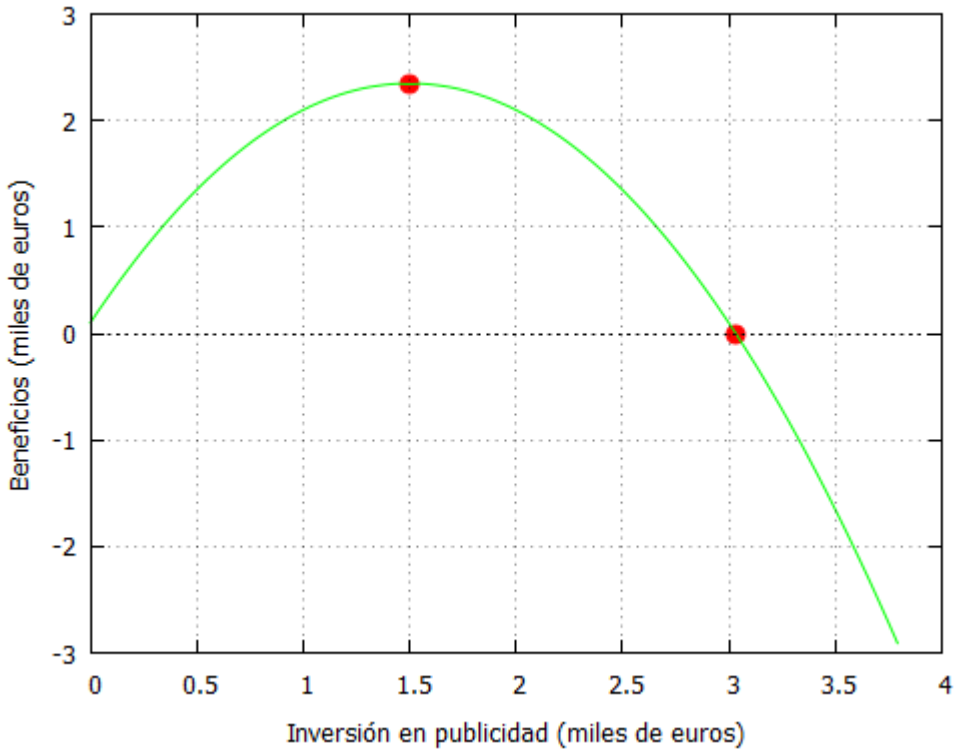


En esta hipotética situación, el analista de marketing puede computar el máximo y el cero de la función, de la siguiente forma:

```
derivada: diff(funcion, x);
maximo:solve(derivada,x), numer;
cero: solve(funcion,x),numer;
f_maximo: ev(funcion,x=1.5), numer;
f_cero:ev(funcion,x=3.03297097167559), numer;
plot2d([[discrete, [[1.5,f_maximo], [3.03297097167559,
f_cero]]], funcion],[x,0,4],[y,-3,3],
[xlabel, “Inversión en publicidad (miles de euros)”],
[ylabel, “Beneficios (miles de euros)”],
[style, points, lines], [color, red, green], [legend,
false]);
```

De este modo tenemos que el máximo es $x_{maximo} = 1.5$, y el cero es $x_{cero} = 3.03297097167559$ cuando $x \geq 0$ (hay otra solución al ser una ecuación de segundo grado pero no nos interesa porque se refiere a una inversión en publicidad negativa, lo cual no es posible).

Podemos representar esos puntos en el gráfico anterior de la siguiente manera:



Es evidente que nos interesa conocer el valor de inversión que maximiza los beneficios, pero también nos puede resultar atractivo conocer el punto a partir del cual incrementar más la inversión produce pérdidas. Y este es el objetivo en el que nos vamos a centrar.

Para ello implementar el método de la bisección, que puede consultarse en Burden, Faires & Burden (2017).

Método de la bisección

(1) Objetivo: Aproximarse numéricamente a la solución *p* de una función $f(x)$, tal que $f(p) = 0$

(2) Condiciones: La función $f(x)$ debe ser continua en el intervalo $[a, b]$ considerado, donde $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo, es decir, $f(a)f(b) < 0$.

(3) Descripción rápida: Escoger un intervalo $[a_1, b_1]$ a priori

donde $f(a_1)f(b_1) < 0$ e ir evaluando soluciones p_i en la mitad de ese intervalo y de los siguientes $[a_i, b_i]$ hasta que se llegue a un cierto número de iteraciones N_i o a un valor prefijado de error ϵ. De este modo, se trata de ir evaluando la función en los valores de medios de cada intervalo sucesivo (donde la anchura de cada intervalo es la mitad del anterior) hasta aproximarse a la solución. Por el teorema de Bolzano, sabemos que vamos a encontrar esa raíz.

(4) Convergencia: Siempre converge a una solución, aunque su velocidad puede ser lenta.

(5) Estimación del error: Hay diversas opciones, aunque una de las más recomendables es el error realtivo:

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \epsilon, p_N \neq 0$$

Implementación en Maxima

Vamos a programar con Maxima el algoritmo de la bisección. Para ello, empleamos un bucle con 15 iteraciones. La inspección gráfica nos permite estipular un intervalo inicial [2.5,3.5]:

```
a[0]:2.5;
b[0]:3.5;
for i:1 thru 15 do(
p[i]:a[i-1]+((b[i-1]-a[i-1])/2),
f[i]: -(p[i])^2+3*(p[i])+0.1,
g[i]: -(a[i-1])^2+3*(a[i-1])+0.1,
if g[i]*f[i]<0
then (b[i]:p[i],
a[i]:a[i-1])
else (a[i]:p[i],
b[i]:b[i-1]),
Error_abs[i]:abs(p[i+1]-p[i]),
Error_rel[i]: Error_abs[i]/abs(p[i+1]));
datos: makelist([i,"Iteración",a[i],b[i],p[i],f[i], Error_abs[i-1],
Error_rel[i-1]], i, 1,15);
matriz_resultados:apply(matrix,datos);
```

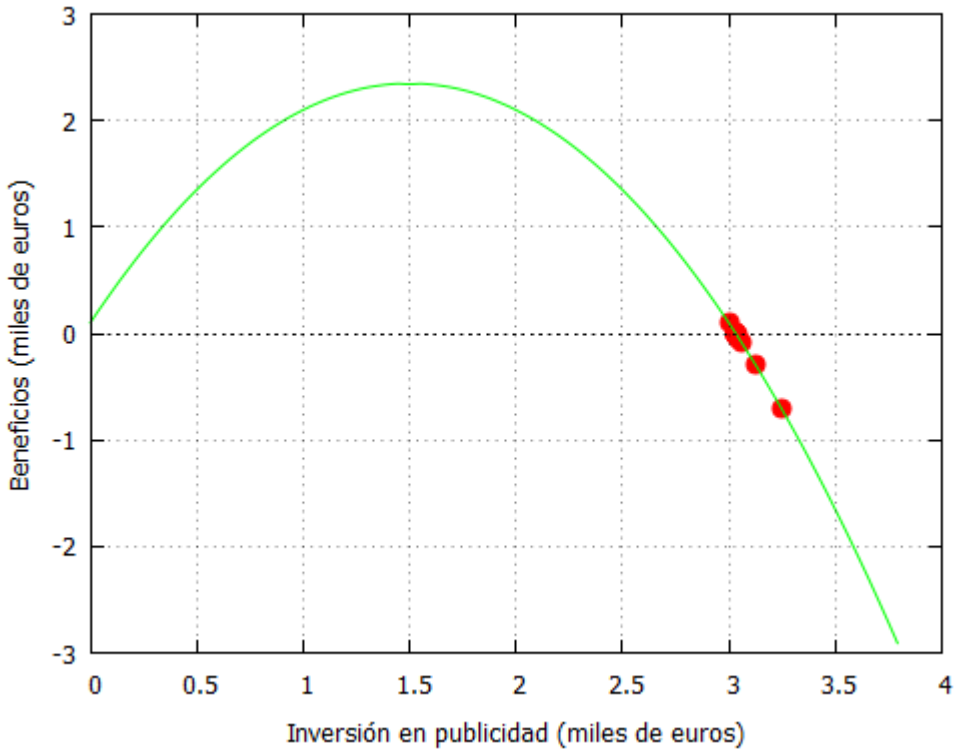
Le hemos dicho al programa que nos retorne en el output siguiente:

1	*Iteración*	3.0	3.5	3.0	0.1	$Error\_abs_0$	$Error\_rel_0$
2	*Iteración*	3.0	3.25	3.25	−0.7125	0.25	0.07692307692307693
3	*Iteración*	3.0	3.125	3.125	−0.290625	0.125	0.04
4	*Iteración*	3.0	3.0625	3.0625	−0.09140625	0.0625	0.02040816326530612
5	*Iteración*	3.03125	3.0625	3.03125	0.005273437500000006	0.03125	0.01030927835051546
6	*Iteración*	3.03125	3.046875	3.046875	−0.04282226562499999	0.015625	0.005128205128205128
7	*Iteración*	3.03125	3.0390625	3.0390625	−0.01871337890624999	0.0078125	0.002570694087403599
8	*Iteración*	3.03125	3.03515625	3.03515625	−0.006704711914062494	0.00390625	0.001287001287001287
9	*Iteración*	3.03125	3.033203125	3.033203125	$-7.118225097656194\ 10^{-4}$	0.001953125	$6.43915003219575\ 10^{-4}$
10	*Iteración*	3.0322265625	3.033203125	3.0322265625	0.002281761169433599	$9.765625\ 10^{-4}$	$3.22061191626409\ 10^{-4}$
11	*Iteración*	3.03271484375	3.033203125	3.03271484375	$7.852077484130915\ 10^{-4}$	$4.8828125\ 10^{-4}$	$1.610046691354049\ 10^{-4}$
12	*Iteración*	3.032958984375	3.033203125	3.032958984375	$3.675222396851141\ 10^{-5}$	$2.44140625\ 10^{-4}$	$8.049585446349512\ 10^{-5}$
13	*Iteración*	3.032958984375	3.0330810546875	3.0330810546875	$-3.375202417373602\ 10^{-4}$	$1.220703125\ 10^{-4}$	$4.024630740129593\ 10^{-5}$
14	*Iteración*	3.032958984375	3.03302001953125	3.03302001953125	$-1.503802835941259\ 10^{-4}$	$6.103515625\ 10^{-5}$	$2.012355865011169\ 10^{-5}$
15	*Iteración*	3.032958984375	3.032989501953125	3.032989501953125	$-5.681309849023264\ 10^{-5}$	$3.0517578125\ 10^{-5}$	$1.006188056547769\ 10^{-5}$

Como puede apreciarse en las dos primeras columnas de resultados tenemos los extremos de cada intervalo del algoritmo. En la tercera está el valor de *p*, que siempre es la mitad del valor de esos extremos. la cuarta columna evalúa la función en cada *p* considerado, mientras que las columnas quinta y sexta corresponden, respectivamente, al error absoluto y al relativo.

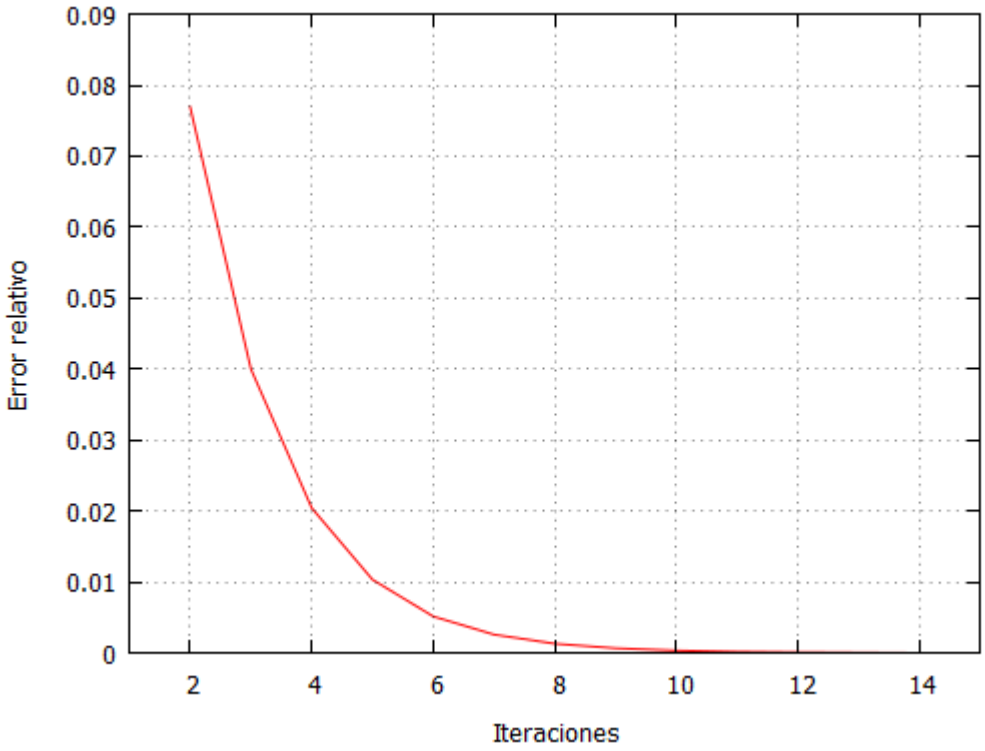
Podemos ver aquí como las iteraciones nos acercan a la solución:

```
matriz_t: transpose(matriz_resultados);
p_list: matriz_t[5];
fp_list: matriz_t[6];
funcion: -x^2+3*x+0.1;
plot2d([[discrete, p_list,fp_list],funcion],[x,0,4],[y,-3,3],
    [xlabel, “Inversión en publicidad (miles de euros)”],
    [ylabel, “Beneficios (miles de euros)”],
  [style, points, lines], [color, red, green], [legend,
                        false]);
```



Y también es interesante comprobar cómo disminuye el error relativo con el número de iteraciones:

```
Error_rel_list: matriz_t[8];
Iteraciones_list:matriz_t[1];
plot2d([discrete,
Iteraciones_list,Error_rel_list],[x,1,15],[y,0,0.09],
[xlabel, “Iteraciones”],
[ylabel, “Error relativo”],
[style, lines], [color, red], [legend, false]);
```



Criterio de parada

Podemos estipular que nos baste con una tolerancia de error, es decir, pedirle al programa que pare las iteraciones cuando se cumpla una condición determinada, por ejemplo, que el error relativo sea menor que una cota que fijemos. De este modo, si fijamos que el error relativo sea como máximo 0.001:

```
                a[0]:2.5;
                b[0]:3.5;
    for i:1 while Error_rel[i]>0.001
                    do(
    p[i]:a[i-1]+((b[i-1]-a[i-1])/2),
      f[i]: -(p[i])^2+3*(p[i])+0.1,
    g[i]: -(a[i-1])^2+3*(a[i-1])+0.1,
             if g[i]*f[i]<0
           then (b[i]:p[i],
                 a[i]:a[i-1])
           else (a[i]:p[i],
                    b[i]:b[i-1]),
     Error_abs[i]:abs(p[i+1]-p[i]),
 Error_rel[i]: Error_abs[i]/abs(p[i+1]),
       print(i,p[i], f[i],Error_rel[i]));
```

Le hemos dicho al programa que fije un error relativo mayor que 0.001, por lo que parará en esa iteración, y de esta manera sabremos que en la siguiente iteración el error relativo estará por debajo de esa cota.

Alternativamente podríamos conocer de forma conservadora las iteraciones necesarias para una precisión determinada empleado la siguiente fórmula:

$$|p - p_N| \leq \frac{b-a}{2^N}$$

Conclusión

En este post hemos explicado con carácter eminentemente práctico el método de la bisección para buscar una aproximación numérica a la solución de una ecuación. Es importante señalar que los errores absoluto y relativo que hemos definido en las programaciones con Maxima se refieren siempre a las estimaciones de la solución en sus respectivas iteraciones, pero no al error absoluto y relativo tomado cuando se conoce valor real de la solución.

En próximos posts, comentaremos otros métodos diferentes.

Todos los posts relacionados

(#411). LOS ROOKIES MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19

(#410) ¿QUIÉN HA SIDO EL MEJOR ANOTADOR DE LA FASE REGULAR DE LA EUROLIGA 2018/19?

(#409). ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ESTIMACIÓN DEL RENDIMIENTO POR MINUTO EN BALONCESTO (II)

(#408). ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA ESTIMACIÓN DEL RENDIMIENTO POR MINUTO EN BALONCESTO (I)

(#407). AVANCE DE LOS NOVATOS MÁS PRODUCTIVOS DE LA NBA 2018/19

(#398). AJUSTE DE FUNCIONES (II): CAPACIDAD EXPLICATIVA Y PARTICIÓN DE LA FUNCIÓN

(#397). AJUSTE DE FUNCIONES (I): SPLINES VS MÍNIMOS CUADRADOS

(#396). INTERPOLACIÓN (IV): MÉTODO DE SPLINE CÚBICO

(#395). INTERPOLACIÓN (III): MÉTODO DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

(#394). INTERPOLACIÓN (II): MÉTODO DE NEVILLE

(#393). INTERPOLACIÓN (I): POLINOMIO DE LAGRANGE

(#391). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (V): MÉTODO DE LA POSICIÓN FALSA

(#390). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (IV): MÉTODO DE LA SECANTE

(#389). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (III): METODO DE NEWTON

(#388). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (II): METODO DEL PUNTO FIJO

(#387). BÚSQUEDA DE SOLUCIONES (I): MÉTODO DE LA BISECCIÓN

(#384). MEJOR UN SÓLO ITEM QUE VARIOS PARA MEDIR ACTITUDES

(#381). TABLAS DE TUMORES TOTALES EN EL ESTUDIO DEL NTP SOBRE EFECTOS DE LA RADIACIÓN DE TELÉFONO MÓVIL

(#380). ÍNDICES APROXIMADOS FLEXIBLES EN ECUACIONES ESTRUCTURALES

(377). AVANZANDO EN LA COMPLEJIDAD; DOBLE DEPENDENCIA

(#376). CAMPOS DIRECCIONALES, COMENZANDO A REPRESENTAR LA COMPLEJIDAD

(#373). PREDICCIONES CON BUENAS APROXIMACIONES

(#366). MODELO DE HOMOGENEIDAD EN TABLAS DE 2X2

(#365). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (V): MATRIZ DE DATOS BRUTOS

(#362). ¿HORMESIS ENTRE EL VOLUMEN DE ENTRENAMIENTO Y LA HIPERTROFIA?

(#358). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (IV): REGRESIÓN LINEAL SIMPLE CON FIABILIDADES DIVERSAS

(#354). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (III): COVARIANZA Y CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES LATENTES

(#353). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (II): VARIABLES LATENTES Y FIABILIDAD

(#352). TESTOSTERONA Y CONSUMO CONSPICUO EN HOMBRES

(#350). BÁSICOS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES (I): COVARIANZAS Y DESVIACIONES SOBRE LA MEDIA

(#346). MODELO NO LINEAL EN LAS VARIABLES PERO LINEAL EN LOS PARÁMETROS CON STATA Y MAXIMA

(#337). EXPLORANDO LA PREDICCIÓN LINEAL EN MARKETING CON MAXIMA

(#336) EXPLORANDO EL DETERMINISMO Y EL AZAR CON C Y MAXIMA

(#335). EXPLORANDO EL COMPORTAMIENTO CAÓTICO CON MAXIMA

(#334). EXPLORANDO LA NO LINEALIDAD CON MAXIMA

(#331). LOS CONSTRUCTOS FORMATIVOS NO REFLEJAN ESTADOS PSICOLÓGICOS

(#323). EL ATAQUE CON MICROONDAS A LA EMBAJADA DE EEUU EN MOSCÚ DURANTE LA GUERRA FRÍA

(#314). REDUCIR EL SESGO EN ESTUDIOS SOBRE EFECTIVIDAD DE VACUNAS

(#313). EL SISTEMA PLANETARIO DE TRAPPIST-1

(#310). MÁS ALLÁ DEL REDUCCIONISMO EN BIOLOGÍA

(#307). LA CRISIS DE LA INVESTIGACIÓN EN PSICOLOGÍA

(#302). CONSTRUCTOS EN PSICOLOGÍA E IMPLICACIONES ESTADÍSTICAS

(#301). CENSURA EN EL LENGUAJE CIENTÍFICO

(#298). ¿CAMBIAR DE ENTRENADOR A MITAD DE TEMPORADA?

(#294). NEUROLOGÍA DE LA MALDAD; PISTAS SOBRE LAS RAÍCES DE LA MALDAD INDIVIDUAL

(#287). MEDIAS VERDADES Y OCULTACIÓN; ACEPTACIÓN DEL ENGAÑO DE CORPORACIONES

(#283). INTERPRETACIÓN FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD; EL PAPEL DE LOS MODELOS

(#276). LA IRRACIONALIDAD, SCHRÖDINGER, Y EL EFECTO TÚNEL

(#265). DEFENDIENDO EL P-VALOR A TRAVÉS DE SU CORRECTA INTERPRETACIÓN

(#264). MÁS ALLÁ DE LOS ENSAYOS CONTROLADOS ALEATORIZADOS

(#263). CAUSALIDAD EN CASOS INDIVIDUALES: ALGUNAS RECOMENDACIONES PARA SU ESTUDIO

(#260). PROPONEN SER 10 VECES MÁS EXIGENTES CON EL P-VALOR

(#257). ERRORES DE CODIFICACIÓN DE EMBOLIAS PULMONARES AL USAR EL ICD-10

(#252). LA PREGABALINA NO SE ASOCIA A MALFORMACIONES EN EL EMBARAZO

(#243). LOS DEPORTISTAS DE ÉLITE VIVEN MÁS, PERO CON MATICES

(#232). LA OTRA HISTORIA DE NIKE

(#191). LA TRIADA OSCURA, LOS ANTICONCEPTIVOS Y LA PREFERENCIA SEXUAL

(#185). VENTA DE ENTRADAS EN LA NBA Y POTENCIAL DE LOS EQUIPOS

(#163). CRECEN LAS DUDAS SOBRE PLS (PARTIAL LEAST SQUARES)

(#159). ENTENDER LA NATURALEZA DE LOS DATOS Y DE LOS TEST ESTADÍSTICOS

(#128). INDICADORES FORMATIVOS EN ECUACIONES ESTRUCTURALES

(#127). AJUSTE EXACTO EN ECUACIONES ESTRUCTURALES

(#104). CORRUPCIÓN Y DESIGUALDAD ENTRE LOS MUY RICOS

(#100). DESCREÍDOS DE LA EPIDEMIOLOGÍA

(#90). REDES EN PSICOPATOLOGÍA Y EN MARKETING

(#76). EL 85-90% DE LOS NUEVOS MEDICAMENTOS SON INNECESARIOS

(#33). CLUSTERS DE CÁNCER PEDIÁTRICO

(#31). TRÁFICO Y CÁNCER DE PULMÓN

(#26). FOTOVOLTAICAS HIPERGEOMÉTRICAS

(#24). ROMPER EL CRISTAL

(#22). COMPLEJIDAD DE LOS FENÓMENOS SOCIALES

(#20). DECISIONES HEURÍSTICAS

(#17). RADICALES DE LAS VACUNAS

(#13). 24755 CACAS EN EL PARQUE

(#12). ESTADÍSTICAS SIN ESTADÍSTICA

(#10). EL DESCUBRIMIENTO DEL ARGÓN

(#6). ¿VIVIMOS MÁS Y CON MEJOR SALUD?

(#5). ¿ES LA ECONOMÍA UNA CIENCIA?

(#3). HEZONJA Y LAS PREDICCIONES ESTADÍSTICAS

(#1) ¿CÓMO JUGARÁ MARIO HEZONJA SU PRÓXIMO PARTIDO?